数理解析研究所講究録
210巻 1974年 17-31



# 非有界作用素の作る algebras

東北大 教養　御園生 善尚

## §1 序

Powers [2] は $*$-algebra の Hilbert 空間上への必ずしも有界でない作用素の作る algebra への表現を考察しているが，その主な結果は $*$-表現についてである。この小論の目的の一つは，一般な表現に対してその共役表現を考えることにより，$*$-表現の共役表現の共役表現を考え，これが $*$-表現であることを示すことである。（定理 2.9） Powers の定義によれば，表現された algebra の commutant は，一般の場合には必ずしも algebra にならない．目的の他の一つは，異なる定義を与えることにより，algebra となる commutant を考察し，共役表現の commutant 等との関係を調べることである．（定理 3.7）

## §2 共役表現

以下考察する Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の作用素は必ずしも有界性を仮定しないが，その定義域はすべて $\mathfrak{H}$ で稠密であるものとする．$\mathfrak{H}$ 上の作用素 A に対して，$\mathfrak{D}(A)$ によりその定義域を表わすものとする．

つぎの (i), (ii), (iii) をみたす $*$-operation をもつ，複素数体上の algebra $\mathfrak{A}$ を $*$-algebra という：

(i)　$A^{**} = A$,

(ii)　$(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$,

(iii)　$(AB)^* = B^* A^*$.

ここに $A, B \in \mathfrak{A}$ で，$\alpha$, $\beta$ は複素数である．以下考える $*$-algebra はすべて単位元 I をもつと仮定する．

<u>定義 2.1</u>　Algebra $\mathfrak{A}$ の各元 A に対して，Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の作用素 $\pi(A)$ が対応し，共通の稠密な定義域 $\mathfrak{D}(\pi)$ をもち，かつつぎの条件をみたすとき，$\pi$ を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への表現という．

(1)　$\pi(I)$ は $\mathfrak{H}$ 上の恒等作用素である．

(2)　任意の $A, B \in \mathfrak{A}$, $f \in \mathfrak{D}(\pi)$ および複素数 $\alpha$, $\beta$ に対して

$$\pi(\alpha A + \beta B) = \alpha \pi(A) + \beta \pi(B)$$

(3)　任意の $A, B \in \mathfrak{A}$, $f \in \mathfrak{D}(\pi)$ に対して

$$\pi(A)\mathfrak{D}(\pi) \subset \mathfrak{D}(\pi), \quad \pi(A)\pi(B)f = \pi(AB)f$$

<u>定義 2.2</u>　$\pi_1$, $\pi_2$ を algebra $\mathfrak{A}$ の Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上への表現とする．$\mathfrak{D}(\pi_1) \supset \mathfrak{D}(\pi_2)$ で，かつ任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して

$$\pi_1(A) \supset \pi_2(A)$$

であるとき，$\pi_1$ を $\pi_2$ の拡大であるといい，$\pi_1 \supset \pi_2$ とかく．

$\pi$ を algebra $\mathfrak{A}$ の Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上への表現とし，$S$ を $\mathfrak{A}$ の任意の有限部分集合とするとき

$$\| f \|_S = \sum_{A \in S} \| \pi(A) f \| , \qquad f \in \mathfrak{D}(\pi)$$

により，$\mathfrak{D}(\pi)$ 上に semi-norm $\| \cdot \|_S$ が定義される．

<u>定義 2.3</u>　上の semi-norm により導入される $\mathfrak{D}(\pi)$ 上の位相に関して $\mathfrak{D}(\pi)$ が完備であるとき，$\pi$ を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への閉表現という．

任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\mathfrak{D}(\pi(A))$ が $\mathfrak{H}$ で稠密であるから，$\pi(A)^*$ が定義される．いま

$$\mathfrak{D}(\pi^*) = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi(A)^*)$$

とすれば，$\mathfrak{D}(\pi^*)$ は $\mathfrak{H}$ の線形部分集合で，

$$\pi^*(A) f = \pi(A^*)^* f \qquad ( f \in \mathfrak{D}(\pi^*))$$

により，$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{H}$ 上の作用素への写像 $\pi^*$ が定義される．$\mathfrak{D}(\pi)$ は $\mathfrak{H}$ で必ずしも稠密ではないので，$\pi^*$ は定義 2.1 の

意味での$\mathfrak{A}$の$\mathfrak{H}$上の表現にならない．これに関して，つぎの補題がなりたつ．

<u>補題 2.4</u>　$\mathfrak{D}(\pi^*)$が$\mathfrak{H}$で稠密ならば，$\pi^*$は$\mathfrak{A}$の$\mathfrak{H}$上への閉表現である．

証明　(1)，(2) がなりたつことは容易にわかる．(3) を示すために，任意の $A\in\mathfrak{A}$ に対して $\pi^*(A)\mathfrak{D}(\pi^*)\subset\mathfrak{D}(\pi^*)$ であることを示そう．$f\in\mathfrak{D}(\pi^*)$，$B\in\mathfrak{A}$ とするとき，任意の $g\in\mathfrak{D}(\pi)$ に対して

$$
\begin{aligned}
|(\pi^*(A)f,\ \pi(B)g)| &= |(\pi(A^*)^*f,\ \pi(B)g)| \\
&= |(f,\ \pi(A^*)\pi(B)g)| \\
&= |(f,\ \pi(A^*B)g)| \\
&= |(\pi(A^*B)^*f,\ g)| \\
&\leqq \|\pi(A^*B)^*f\|\cdot\|g\|
\end{aligned}
$$

$g\in\mathfrak{D}(\pi)$は任意であったから，$\pi^*(A)f\in\mathfrak{D}(\pi(B)^*)$．ゆえに

$$\pi^*(A)f\in\bigcap_{B\in\mathfrak{A}}\mathfrak{D}(\pi(B)^*)=\mathfrak{D}(\pi^*).$$

すなわち $\pi^*(A)\mathfrak{D}(\pi^*)\subset\mathfrak{D}(\pi^*)$ が示された．(3) の後半がなりたつことは容易に示される．ゆえに$\pi^*$は$\mathfrak{A}$の$\mathfrak{H}$上への表現である．

つぎに$\pi^*$が閉表現であることを示そう．$\{f_\alpha\}$を定義 2.3 で考えた位相に関する $\mathfrak{D}(\pi^*)$ の *Cauchy net* であるとする．

$\{f_\alpha\}$ が $\mathfrak{H}$ で通常の位相に関して Cauchy net であることは明らかである．ゆえに $f_\alpha \to f$ となる $f \in \mathfrak{H}$ が存在する．同様に $\{\pi(A)^* f_\alpha\}$ も $\mathfrak{H}$ における Cauchy net である．$\pi(A)^*$ は閉作用素であるから，$f \in \mathfrak{D}(\pi(A)^*)$ でかつ $\pi(A)^* f_\alpha \to \pi(A)^* f$. $A \in \mathfrak{A}$ は任意であるから $f \in \mathfrak{D}(\pi^*)$ で，$\mathfrak{A}$ の任意の有限集合 S に対して

$$\sum_{A \in S} \| \pi^*(A)(f_\alpha - f) \| \to 0$$

である．すなわち $\mathfrak{D}(\pi^*)$ は定義 2.3 の位相で完備であり，$\pi^*$ が閉表現であることが示された．

この補題により，つぎの定義が可能である．

<u>定義 2.5</u>　$\mathfrak{D}(\pi^*)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密であるとき，$\pi^*$ を $\pi$ の共役表現といい，$\pi = \pi^*$ をみたす表現を自己共役表現という．

<u>補題 2.6</u>　$\pi_1, \pi_2$ を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への表現でかつ $\pi_1 \subset \pi_2$ とする．もし $\mathfrak{D}(\pi_2^*)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密ならば $\pi_1^* \supset \pi_2^*$ である．

証明　仮定から，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\pi_1(A) \subset \pi_2(A)$. ゆえに $\pi_1(A)^* \supset \pi_2(A)^*$. したがって

$$\mathfrak{D}(\pi_1^*) = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi_1(A)^*) \supset \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi_2(A)^*) = \mathfrak{D}(\pi_2^*).$$

$\mathfrak{D}(\pi_2^*)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密であるから，$\mathfrak{D}(\pi_1^*)$ も $\mathfrak{H}$ で稠密である．ゆえに共役表現 $\pi_1^*, \pi_2^*$ が考えられる．$\pi_1^*$ が $\pi_2^*$ の拡大であ

ることは明らかであろう．

<u>補題 2.7</u>　$\mathfrak{D}(\pi^*)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密であるとき，$\pi^*$ の共役表現 $\pi^{**}$ は $\pi$ の閉拡大である．

証明　$A \in \mathfrak{A}$ とする．$\mathfrak{D}(\pi^*)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密であるから，$\mathfrak{D}(\pi(A)^*)$ は $\mathfrak{H}$ で稠密である．ゆえに $\pi(A)^{**}$ が存在して，$\pi(A)^{**} = \overline{\pi(A)}$．一方 $\pi^*(A^*) \subset \pi(A)^*$ であるから $\pi^*(A^*)^* \supset \pi(A)^{**}$ である．ゆえに

$$\mathfrak{D}(\pi^{**}) = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi^*(A^*)^*) \supset \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi(A)^{**}) \supset \mathfrak{D}(\pi).$$

すなわち $\mathfrak{D}(\pi^{**})$ は $\mathfrak{H}$ で稠密である．ゆえに補題 2.4 から $\pi^{**}$ は $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への閉表現である．また，任意の $A \in \mathfrak{A}$，$f \in \mathfrak{D}(\pi)$ に対して

$$\pi(A)f = \pi(A)^{**}f = \pi^*(A^*)^*f = \pi^{**}(A)f$$

ゆえに $\pi^{**}$ は $\pi$ の拡大である．

Powers [2] により，つぎの定義をする．

<u>定義 2.8</u>　$\pi$ を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への表現とする．任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\pi(A^*) \subset \pi(A)^*$ をみたすとき，$\pi$ を $*$-表現またはエルミート表現という．

Powers は共役表現を $*$-表現に対してのみ考察している．われわれの共役表現に関する定義は，容易にわかるように，$*$-表現の場合は Powers の定義と一致する．

$*$-表現に関してつぎの定理がなりたつ.

<u>定理 2.9</u>　$\pi$ を $*$-algebra $\mathfrak{A}$ の Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上への $*$-表現とするとき, $\pi^{**}$ はまた $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への $*$-表現である.

証明　$\pi$ を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への $*$-表現とするとき

$$\mathfrak{D}(\pi^*) = \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi(A)^*) \supset \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi(A)) = \mathfrak{D}(\pi)$$

ゆえに $\mathfrak{D}(\pi^*)$ は $\mathfrak{H}$ で稠密である. したがって, 補題 2.7 の証明からわかるように $\mathfrak{D}(\pi^{**}) \supset \mathfrak{D}(\pi)$ であり, $\mathfrak{D}(\pi^{**})$ は $\mathfrak{H}$ で稠密である. ゆえに $\pi^{**}$ の共役表現 $\pi^{***}$ が考えられる. 補題 2.7 から

$$\pi^{**} \supset \pi \quad , \quad \pi^{***} \supset \pi^*$$

である. ゆえに補題 2.6 から

$$\pi^{***} \subset \pi^*$$

をうる. ゆえに $\pi^* = \pi^{***}$. 一方 $\pi$ が $*$-表現であるから, $\pi \subset \pi^*$ で, 補題 2.6 より $\pi^* \supset \pi^{**}$ である. したがって

$$\pi^{**} \subset \pi^{***}$$

すなわち $\pi^{**}$ は $*$-表現である.

定理の証明からつぎの系をうる.

<u>系 2.10</u>　$\pi$ を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への $*$-表現とするとき, $\pi^* = \pi^{***}$ である. さらに $\pi^*$ は $\pi^{**}$ の閉拡大である.

## §3 $\pi(\mathfrak{A})$ の commutants

$\pi$ を $*$-algebra $\mathfrak{A}$ の Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上への表現とする。以下では条件：

$$\overline{\mathfrak{D}(\pi^*)} = \mathfrak{H}$$

を仮定する。$\pi$ が $*$-表現のときは，定理 2.9 の証明から，この条件はみたされている。

<u>定義 3.1</u> 任意の $A \in \mathfrak{A}$，$f \in \mathfrak{D}(\pi)$ および $g \in \mathfrak{D}(\pi^*)$ に対して

$$(C\pi(A)f, g) = (Cf, \pi^*(A^*)g)$$

をみたす $\mathfrak{H}$ 上の有界作用素 $C$ の集合を $(\mathfrak{A}, \pi)'$ であらわす。また任意の $A \in \mathfrak{A}$，$f, g \in \mathfrak{D}(\pi)$ に対して

$$(C\pi(A)f, g) = (Cf, \pi(A^*)g)$$

をみたす $\mathfrak{H}$ 上の有界作用素の集合を $\pi(\mathfrak{A})'$ であらわす。

$\pi$ が $*$-表現であるとき，$\pi(\mathfrak{A})'$ の定義は Powers の定義と一致し，さらに $(\mathfrak{A}, \pi)' \subset \pi(\mathfrak{A})'$ である。$(\mathfrak{A}, \pi)'$，$\pi(\mathfrak{A})'$ に関してつぎがなりたつことは容易にわかる。

(i) $(\mathfrak{A}, \pi)'$, $\pi(\mathfrak{A})'$ は $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ の線形部分集合である。

(ii) $(\mathfrak{A}, \pi)'$, $\pi(\mathfrak{A})'$ は弱閉である。

(iii) $C \in \pi(\mathfrak{A})'$ ならば $C^* \in \pi(\mathfrak{A})'$ である。

<u>補題 3.2</u> $C \in (\mathfrak{A}, \pi)'$ ならば $C\mathfrak{D}(\pi) \subset \mathfrak{D}(\pi^{**})$ で，任意の $A \in \mathfrak{A}$，$f \in \mathfrak{D}(\pi)$ に対して

$$C\pi(A)f = \pi^{**}(A)Cf$$

証明　仮定から，任意の $A\in\mathfrak{A}$，$f\in\mathfrak{D}(\pi)$ および $g\in\mathfrak{D}(\pi^*)$ に対して

$$(C\pi(A)f,\ g) = (Cf,\ \pi^*(A^*)g)$$

ゆえに

$$|(C\pi(A)f,\ g)| \leqq \|C\pi(A)f\|\cdot\|g\|$$

したがって $Cf\in\mathfrak{D}(\pi^*(A^*)^*)$．$A$ は任意であったから $Cf\in\mathfrak{D}(\pi^{**})$．さらに

$$\begin{aligned}(C\pi(A)f,\ g) &= ((\pi^*(A^*))^*Cf,\ g)\\ &= (\pi^{**}(A)Cf,\ g)\end{aligned}$$

$\mathfrak{D}(\pi^*)$ は $\mathfrak{H}$ で稠密であるから

$$C\pi(A)f = \pi^{**}(A)Cf$$

<u>補題 3.3</u>　$\pi$ を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への $*$－表現とするとき，つぎの結果がなりたつ．

(1)　任意の $A\in\mathfrak{A}$，$C\in(\mathfrak{A},\pi^*)'$ に対して $C\pi^*(A)\subset\pi^*(A)C$．

(2)　任意の $A\in\mathfrak{A}$，$C\in(\mathfrak{A},\pi^{**})'$ に対して $C\pi^{**}(A)\subset\pi^{**}(A)C$．

(3)　$C\in(\mathfrak{A},\pi^*)' \iff C^*\in(\mathfrak{A},\pi^{**})'$

(4)　$(\mathfrak{A},\pi^*)'$，$(\mathfrak{A},\pi^{**})'$ は algebra である．

証明　系 2.10 から $\pi^*=\pi^{***}$．ゆえに $\pi^{**}=\pi^{****}$．したがって，(1)，(2) は補題 3.2 から明らかである．

(3) を示そう．$C\in(\mathfrak{A},\pi^*)'$ とすれば，任意の $A\in\mathfrak{A}$，$f\in$

$\mathfrak{D}(\pi^*)$ および $g \in \mathfrak{D}(\pi^{**})$ に対して

$$(C\pi^*(A^*)f,\ g) = (Cf,\ \pi^{**}(A)g)$$

ゆえに

$$(\pi^*(A^*)f,\ C^*g) = (f,\ C^*\pi^{**}(A)g)$$

$\pi^* = \pi^{***}$ であるから

$$(C^*\pi^{**}(A)g,\ f) = (C^*g,\ \pi^{***}(A^*)f)$$

ゆえに $C^* \in (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ が示された．逆も同様である．

(4)を示すために，$C_1,\ C_2 \in (\mathfrak{A}, \pi^*)'$ とし，$A$，$f$，$g$ を上のようにとれば

$$\begin{aligned}(C_1C_2\pi^*(A)f,\ g) &= (C_1\pi^*(A)C_2f,\ g)\\ &= (\pi^*(A)C_1C_2f,\ g)\\ &= (C_1C_2f,\ \pi^*(A)^*g)\\ &= (C_1C_2f,\ \pi^{**}(A^*)g)\end{aligned}$$

すなわち $C_1C_2 \in (\mathfrak{A}, \pi^*)'$ であり，$(\mathfrak{A}, \pi^*)'$ は *algebra* である．$(\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ が *algebra* であることも同様に示される．

<u>補題 3.4</u>　$\pi$ を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への $*$－表現とするとき，$(\mathfrak{A}, \pi^*)' \subset \pi^{**}(\mathfrak{A})'$，$(\mathfrak{A}, \pi^{**})' \subset \pi^{**}(\mathfrak{A})'$ で，$(\mathfrak{A}, \pi^*)' \wedge (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ は *von Neumann algebra* である．

証明　$C \in (\mathfrak{A}, \pi^*)'$ とすれば，任意の $A \in \mathfrak{A}$，$f \in \mathfrak{D}(\pi^*)$ および $g \in \mathfrak{D}(\pi^{**})$ に対して

$$(C\pi^*(A)f,\ g) = (Cf,\ \pi^{**}(A^*)g)$$

系 2.10 から $\pi^*$ は $\pi^{**}$ の拡大であるから，任意の $A \in \mathfrak{A}$，$f, g \in \mathfrak{D}(\pi^{**})$ に対して

$$(C\pi^{**}(A)f,\ g) = (Cf,\ \pi^{**}(A^*)g)$$

すなわち，$C \in \pi^{**}(\mathfrak{A})'$ である．ゆえに

$$(\mathfrak{A},\ \pi^*)' \subset \pi^{**}(\mathfrak{A})'$$

が示された．$(\mathfrak{A},\ \pi^{**})' \subset \pi^{**}(\mathfrak{A})'$ であることも同様に示される．

$(\mathfrak{A}, \pi^*)'$，$(\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ は弱閉であるから，$(\mathfrak{A}, \pi^*)' \wedge (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ は弱閉である．また，補題 3.3 から $(\mathfrak{A}, \pi^*)' \wedge (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ が自己共役な *algebra* であることも容易にわかる．したがって $(\mathfrak{A}, \pi^*)' \wedge (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ は *von Neumann algebra* である．

<u>定義 3.5</u>　$\pi$ を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への表現とし，$A \in \mathfrak{A}$ に対して $\overline{\pi(A)}$ の極分解を $\overline{\pi(A)} = V_{\pi(A)}|\overline{\pi(A)}|$ であらわす．いま

$$|\overline{\pi(A)}| = \int_0^\infty \lambda\, dE_{\pi(A)}(\lambda)$$

を $|\overline{\pi(A)}|$ のスペクトル分解とするとき

$$\{V_{\pi(A)},\ E_{\pi(A)}(\lambda) \mid A \in \mathfrak{A}\}$$

により生成される *von Neumann algebra* を $R(\mathfrak{A}, \pi)$ で表わすことにする．

定義から容易にわかるように，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して，

$$\overline{\pi(A)}\ \eta\ R(\mathfrak{A}, \pi),\quad \pi(A)^*\ \eta\ R(\mathfrak{A}, \pi)$$

が [1] の意味でなりたつ．

補題 3.6　$C \in R(\mathfrak{A},\pi)'$ であるための必要十分条件は，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $C$ が $\overline{\pi(A)}$ および $\pi(A)^*$ と可換なことである．

証明　$C \in R(\mathfrak{A},\pi)'$ とすれば，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $C$ が $\pi(A)$ および $\pi(A)^*$ と可換なことは明らかである．

逆に，$C$ が任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\overline{\pi(A)}$ および $\pi(A)^*$ と可換であるとする．$\pi(A)^* = \overline{\pi(A)}^*$ であるから，$C$ は $\overline{\pi(A)}^*\overline{\pi(A)}$ と可換で，したがって $|\overline{\pi(A)}|$ と可換である．ゆえに $C$ は $E_{\pi(A)}(\lambda)$ と可換である．また $C^*$ が $|\pi(A)|$ と可換であることも容易にわかる．つぎに $C$ が $V_{\pi(A)}$ と可換であることを示そう．$V_{\pi(A)}$ は $|\overline{\pi(A)}|$ の range の閉包 $\overline{\mathcal{R}(|\pi(A)|)}$ から $\overline{\pi(A)}$ の range の閉包 $\overline{\mathcal{R}(\overline{\pi(A)})}$ への等距離作用素で，$f \in \mathfrak{D}(\overline{\pi(A)})$ とするとき

$$C V_{\pi(A)} |\overline{\pi(A)}| f = C\, \overline{\pi(A)} f = \overline{\pi(A)}\, C f ,$$

$$V_{\pi(A)} C |\overline{\pi(A)}| f = V_{\pi(A)} |\overline{\pi(A)}| C f = \overline{\pi(A)}\, C f .$$

ゆえに

$$C V_{\pi(A)} |\overline{\pi(A)}| f = V_{\pi(A)} C |\overline{\pi(A)}| f$$

すなわち，$\overline{\mathcal{R}(|\pi(A)|)}$ 上で $C V_{\pi(A)} = V_{\pi(A)} C$ がなりたつ．$g \in \overline{\mathcal{R}(|\overline{\pi(A)}|)}^{\perp}$，$f \in \mathfrak{D}(|\overline{\pi(A)}|)$ とすれば

$$(Cg, |\overline{\pi(A)}| f) = (g, C^* |\overline{\pi(A)}| f)$$

$$= ( g, |\overline{\pi(A)}| C^* f ) = 0$$

ゆえに $Cg \in \overline{\mathcal{R}(|\overline{\pi(A)}|)}^{\perp}$. したがって

$$V_{\pi(A)} C g = 0$$

一方，$V_{\pi(A)} g = 0$ であるから

$$C V_{\pi(A)} g = 0$$

ゆえに $\overline{\mathcal{R}(|\overline{\pi(A)}|)}^{\perp}$ 上で $C V_{\pi(A)} = V_{\pi(A)} C$ である．以上から $\mathfrak{H}$ 上で

$$C V_{\pi(A)} = V_{\pi(A)} C$$

$C$ が $\overline{\pi(A)}$ および $\pi(A)^*$ と可換なとき，$C^*$ も $\overline{\pi(A)}$ および $\pi(A)^*$ と可換であるから，$C^* V_{\pi(A)} = V_{\pi(A)} C^*$. ゆえに

$$C V_{\pi(A)}^* = V_{\pi(A)}^* C$$

以上から $C \in R(\mathfrak{A}, \pi)'$ が示された．

<u>定理 3.7</u>　$\pi$ を $*$-algebra $\mathfrak{A}$ の Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上への $*$-表現とするとき，$R(\mathfrak{A}, \pi^*)'$, $R(\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ および $(\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ は互いに一致してかつ $\pi^{**}(\mathfrak{A})'$ に含まれる．

証明　$C \in R(\mathfrak{A}, \pi^*)'$ とすれば，補題 3.6 から任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $C$ は $\overline{\pi^*(A)}$ および $\pi^*(A)^*$ と可換である．ゆえに任意の $f \in \mathfrak{D}(\pi^*)$, $g \in \mathfrak{D}(\pi^{**})$ に対して

$$\begin{aligned}( C \pi^*(A) f, g ) &= ( C \overline{\pi^*(A)} f, g ) \\ &= ( \overline{\pi^*(A)} C f, g ) \\ &= ( C f, \pi^*(A)^* g )\end{aligned}$$

$$= (Cf,\ \pi^{**}(A^*)g)$$

ゆえに $C \in (\mathfrak{A}, \pi^*)'$. 同様にして，$C \in (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ をうる．したがって

$$R(\mathfrak{A}, \pi^*)' \subset (\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$$

逆に，$C \in (\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ とすれば，補題 3.3 から $C$ は任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\pi^*(A)$ と可換である．したがって $\overline{\pi^*(A)}$ と可換である．$C^* \in (\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ であるから，$C^*$ は $\pi^*(A)$ と可換である．ゆえに $C$ は $\pi^*(A)^*$ と可換である．したがって，補題 3.6 から $C \in R(\mathfrak{A}, \pi^*)'$ である．すなわち

$$(\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})' \subset R(\mathfrak{A}, \pi^*)'$$

ゆえに

$$R(\mathfrak{A}, \pi^*)' = (\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$$

である．同様にして

$$R(\mathfrak{A}, \pi^{**})' = (\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$$

である．これらが $\pi^{**}(\mathfrak{A})'$ に含まれることは補題 3.4 から明らかである．

## 文　献

[1] F. Murray and J. von Neumann, Rings of operators, Ann. Math., vol. 37 (1936), pp. 116 - 229

[2] R. T. Powers, Self-adjoint algebras of unbounded

operators, Comm. Math. Phys., vol. 21 (1971), pp. 85 – 124.